第24講　積分でやっておきたいこと（その２）

24

［A］　関数 $g(x)$ は次の3つの条件を満たすとする．

（i）　$g(0)=0$

（ii）　すべての x について，$g(x)=g(1-x)$

（iii）　すべての x について，$g''(x)<0$

実数 t が $t>0$ の範囲を動くとき，関数

$$f(t)=\int_0^1 |x^2-tg(x)|dx$$

の最小値を求めよ．

［B］　次の問いに答えよ．

（1）　以下の等式を示せ．

$$\frac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)}{\cos x}=\sqrt{3}+\tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

（2）　閉区間 $[0,\ a]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，

$$\int_0^a f(a-x)dx=\int_0^a f(x)dx$$

を示せ．

（3）　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \log(\sqrt{3}+\tan x)dx$ の値を求めよ．

< Note >

第 24 講　積分でやっておきたいこと（その 2）

24　$f(x)$ が $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な関数であるとき

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

が成立することを示し，これを用いて定積分

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx$$

を求めよ．

＜ Note ＞

第 24 講　積分でやっておきたいこと（その２）

24

［A］ 関数 $g(x)$ は次の３つの条件を満たすとする．

（i） $g(0)=0$

（ii） すべての x について，$g(x)=g(1-x)$

（iii） すべての x について，$g''(x)<0$

実数 t が $t>0$ の範囲を動くとき，関数

$$f(t)=\int_0^1 |x^2-tg(x)|dx$$

の最小値を求めよ．

［B］ 次の問いに答えよ．

（1） 以下の等式を示せ．

$$\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\cos x}=\sqrt{3}+\tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

（2） 閉区間 $[0,\ a]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して，

$$\int_0^a f(a-x)dx=\int_0^a f(x)dx$$

を示せ．

（3） 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\log(\sqrt{3}+\tan x)dx$ の値を求めよ．

【答】 ［A］ $\dfrac{1}{4}$

［B］（1）略　（2）略　（3）$\dfrac{\pi}{6}\log 2$

【解説】

［A］（ii）より

$$g\left(\frac{1}{2}-t\right)=g\left(1-\left(\frac{1}{2}-t\right)\right)=g\left(\frac{1}{2}+t\right)$$

となるので $y=g(x)$ のグラフは $x=\dfrac{1}{2}$ に関して対称で上に凸なものとなる．これと $g(0)=0$ より $y=x^2$ と $y=tg(x)$ は $x=0$ と $0<x<1$ に１つずつ共有点をもつので，後者を $x=\alpha\ (0<\alpha<1)$ とおく．

$$\alpha^2=tg(\alpha)$$

このとき

$$\begin{aligned}f(t)&=\int_0^\alpha\{-x^2+tg(x)\}dx+\int_\alpha^1\{x^2-tg(x)\}dx\\&=\left\{\int_0^\alpha g(x)dx-\int_\alpha^1 g(x)dx\right\}t+\int_0^\alpha(-x^2)dx+\int_\alpha^1 x^2dx\\&=\left\{\int_0^\alpha g(x)dx-\int_\alpha^1 g(x)dx\right\}\frac{\alpha^2}{g(\alpha)}+\int_0^\alpha(-x^2)dx+\int_\alpha^1 x^2dx\end{aligned}$$

この α の関数を微分すると

$$2g(\alpha)\cdot\frac{\alpha^2}{g(\alpha)}+\left\{\int_0^\alpha g(x)dx-\int_\alpha^1 g(x)dx\right\}\cdot\frac{2\alpha g(\alpha)-\alpha^2 g'(\alpha)}{\{g(\alpha)\}^2}-2\alpha^2$$

$$=\left\{\int_0^\alpha g(x)dx-\int_\alpha^1 g(x)dx\right\}\cdot\frac{2\alpha g(\alpha)-\alpha^2 g'(\alpha)}{\{g(\alpha)\}^2}$$

ここで

$$\{2\alpha g(\alpha)-\alpha^2 g'(\alpha)\}'=2g(\alpha)-\alpha^2 g''(\alpha)>0$$

$2\times 0\cdot g(0)-0^2\cdot g'(0)=0$ より $2\alpha g(\alpha)-\alpha^2 g'(\alpha)>0$

　よって　$0<x<1$ において

$$\int_0^\alpha g(x)dx-\int_\alpha^1 g(x)dx$$

$$=\int_0^\alpha g(x)dx-\int_{1-\alpha}^0 g(1-t)\cdot(-dt)$$

$$=\int_0^\alpha g(x)dx+\int_{1-\alpha}^0 g(t)dt$$

$$=\int_{1-\alpha}^\alpha g(x)dx=0$$

となるとき $f(t)$ は最小となるが $y=g(x)$ のグラフの対称性より

$$\alpha=1-\alpha \iff \alpha=\frac{1}{2}$$

のとき $f(t)$ は最小となる．このときの $f(t)$ の値は

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(-x^2)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2dx=\left[-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

［B］ (1)

$$\begin{aligned}&2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\\&=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)\\&=\sqrt{3}\cos x+\sin x\end{aligned}$$

よって　$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ において

$$\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\cos x}=\sqrt{3}+\tan x$$

(2)　$\int_0^a f(a-x)dx$ において $a-x=t$ と置換すると $x=a$ のとき $t=0$，$x=0$ のとき $t=a$，$dx=-dt$ より

$$\begin{aligned}\int_0^a f(a-x)dx&=\int_a^0 f(t)(-dt)\\&=\int_0^a f(t)dt\\&=\int_0^a f(x)dx\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{6}}\log(\sqrt{3}+\tan x)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\log\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\cos x}dx\quad\text{((1)より)}\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\log 2\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\log\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right\}dx-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\log(\cos x)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\log 2\,dx\quad\text{((2)より)}\\&=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}\log 2}\end{aligned}$$

第 24 講　積分でやっておきたいこと（その２）

24　$f(x)$ が $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な関数であるとき

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

が成立することを示し，これを用いて定積分

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx$$

を求めよ．

【答】　$\dfrac{\pi}{4}\log 3$

【解説】

$x=\pi-t$ と置換すると

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_{\pi}^{0} (\pi-t)f(\sin(\pi-t))\cdot(-dt)$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi-t)f(\sin t)dt$$

$$\therefore\quad 2\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

よって

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

また

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(2-\cos x)(2+\cos x)}dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin x}{2-\cos x} + \frac{\sin x}{2+\cos x}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\Big[\log(2-\cos x) - \log(2+\cos x)\Big]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[\log\frac{2-\cos x}{2+\cos x}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(\log\frac{3}{1} - \log\frac{1}{3}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{4}\log 3}$$